

DECISIÓN EN GRUPO CON AHP. UNA APROXIMACIÓN BAYESIANA BASADA EN MIXTURAS

GARGALLO VALERO, PILAR
Departamento de Métodos Estadísticos
Universidad de Zaragoza
correo-e: pigarga@unizar.es

MORENO JIMÉNEZ, JOSÉ MARÍA
Departamento de Métodos Estadísticos
Universidad de Zaragoza
correo-e: moreno@unizar.es

SALVADOR FIGUERAS, MANUEL
Departamento de Métodos Estadísticos
Universidad de Zaragoza
correo-e: salvador@unizar.es

RESUMEN

El trabajo pretende detectar grupos de opinión homogéneos en la fase de valoración seguida en decisión en grupo con el Proceso Analítico Jerárquico. Para ello se utiliza una aproximación bayesiana jerárquica basada en el empleo de mixturas. La metodología propuesta se ilustra mediante el análisis de un caso práctico.

Palabras clave: AHP, Decisión en Grupo, Inferencia Bayesiana, Mixturas, Métodos MCMC.

1. Introducción

La complejidad de los problemas decisionales planteados en la conocida como sociedad del conocimiento, y la gran especialización de los individuos en este nuevo contexto, requieren la utilización de aproximaciones más abiertas, flexibles y adaptables a la decisión con múltiples actores que las tradicionales (Moreno-Jiménez y otros, 1999; Moreno-Jiménez, 2001). Estos enfoques (Moreno-Jiménez, 2003) deberán permitir capturar los cambios filosóficos (visión holística de la realidad), metodológicos (consideración de lo tangible y de lo intangible) y tecnológicos (redes de comunicación) que han motivado esta nueva sociedad caracterizada por el conocimiento y la comunicación.

Para poder integrar lo muy pequeño con lo muy grande, lo individual con lo colectivo, lo objetivo con lo subjetivo, lo lineal con lo circular, lo determinístico con lo estocástico, así como para poder incorporar las visiones de la realidad de los múltiples actores implicados en la resolución del problema, una de las aproximaciones multicriterio más extendida en nuestros días es el Proceso Analítico Jerárquico (AHP) propuesto por Thomas L. Saaty a mediados de los 70 (Saaty, 1977, 1980).

En dicha aproximación se construye una escala de razón asociada a las prioridades de los diferentes elementos comparados siguiendo cuatro etapas: estructuración, valoración, priorización y síntesis. En la etapa de estructuración se construye una jerarquía en la que se representan los aspectos relevantes del problema (criterios, subcriterios, atributos y alternativas); en la etapa de valoración se incorporan las preferencias del decisor mediante matrices de comparaciones pareadas recíprocas, utilizando para ello juicios pertenecientes a la escala fundamental propuesta por Saaty; en la etapa de priorización se calculan las prioridades locales de cada alternativa de la jerarquía. Utilizando el llamado "principio de composición jerárquica", se obtienen las prioridades globales de cada alternativa que se sintetizan mediante procedimientos de agregación (habitualmente aditivos) para obtener las prioridades totales de las alternativas comparadas.

A diferencia de otras técnicas multicriterio AHP permite, además, evaluar el grado de inconsistencia del decisor al emitir sus juicios en la matriz recíproca positiva de comparaciones pareadas, siendo la Razon de Consistencia (Saaty, 1980) y el Índice de Consistencia Geométrico (Crawford and Williams, 1985; Aguarón y Moreno-

Jiménez, 2003) las medidas más utilizadas en la literatura. Ambas sin embargo, están muy relacionadas (Genest and Rivest, 1994).

La flexibilidad y adaptabilidad de AHP han permitido su empleo en la toma de decisiones con múltiples actores. Moreno y otros (2002) distinguen tres situaciones diferentes al hablar de decisiones con múltiples actores: (i) Decisión en Grupo; (ii) Decisión Negociada y (iii) Decisión Sistémica. En el primer caso los individuos funcionan como un todo en la búsqueda de un fin común. En el segundo caso, cada individuo resuelve el problema por su cuenta y se buscan las zonas de acuerdo y desacuerdo entre los actores. Por último, en el tercer caso se permite que cada individuo actúe de manera independiente y se busca cómo poder integrar todas las posturas atendiendo al principio de tolerancia.

Existen, sin embargo, situaciones en las que el número de actores potenciales interesados en el proceso es muy grande. Así ocurre, por ejemplo, en los procesos de democracia electrónica (Moreno-Jiménez y Polasek, 2003) en los cuales se plantea un problema que afecta a una comunidad cuyos miembros expresan sus opiniones a través de medios informáticos como Internet; en otras ocasiones la opinión de dichos actores se obtiene mediante la realización de encuestas elaboradas al efecto. En todos estos casos se plantea la necesidad de inferir, a partir de la información obtenida, cuál es el estado de opinión de la población afectada con el fin de integrarla en el proceso de toma de decisiones final. Es, por lo tanto, necesario extender las herramientas tradicionales de AHP, pensadas inicialmente para la resolución de problemas con un número reducido de actores, para tratar con este tipo de situaciones a fin de elaborar caminos de consenso que permitan una toma de decisiones más adecuadas mediante procesos de negociación.

En este trabajo se plantea una metodología para resolver este tipo de problemas en un contexto local (un solo criterio). Para ello se utiliza un modelo jerárquico bayesiano basado en el modelo multiplicativo basado en la utilización de mixturas para describir las prioridades de los individuos de la población objeto de estudio. La aproximación adoptada es flexible pudiendo extenderse fácilmente a situaciones más generales (varios criterios, información incompleta y/o imprecisa, etc) y permite, en particular, analizar la existencia de grupos de opinión diferentes dentro de la población, a partir de los cuales podrían iniciarse procesos de negociación que condujeran eventualmente, a una resolución consensuada del problema.

El trabajo se estructura como sigue: la Sección 2 plantea el problema; en la Sección 3 se describe la metodología propuesta la cual se ilustra en la Sección 4 mediante el análisis de un caso práctico. Finalmente, la Sección 5 concluye señalando los resultados más destacados del estudio.

Notación

Antes de comenzar introducimos, brevemente, la notación seguida en el trabajo. Los vectores y matrices serán denotados en negrita siendo $\mathbf{0}_n$ el vector nulo $n \times 1$, $\mathbf{1}_n$ el vector de n unos, \mathbf{I}_n es la matriz identidad ($n \times n$) y $\mathbf{e}_{\ell,n} = (\delta_{\ell 1}, \dots, \delta_{\ell n})'$ con $\delta_{ij} = 1$ si $i=j$ y 0 si $i \neq j$ y $\ell \in \{1, \dots, n\}$ es el ℓ -ésimo vector coordenado de \mathbf{R}^n . Si X, Y son dos variables aleatorias, $[X|Y]$ denotará la densidad de la distribución de X condicionada por Y . Así mismo $N(\mu, \sigma^2)$ denota la distribución normal univariante con media μ y varianza σ^2 y $N_p(\mu, \Sigma)$ la distribución normal p -variante con vector de medias $\mu \in \mathbf{R}^p$ y matriz de varianzas y covarianzas Σ ($p \times p$). $\text{Gamma}(p, a)$ denota la distribución gamma con media p/a y varianza p/a^2 y $\text{IGamma}(p, a)$ la distribución gamma invertida correspondiente. $\text{Poisson}(\lambda)$ denota la distribución de Poisson de media λ . $\text{Beta}(p, q)$ la distribución beta de parámetros p y q . $\text{Wishart}_p(n, \mathbf{S})$ denota la distribución Wishart p -dimensional con n grados de libertad y matriz de escala \mathbf{S} cuya densidad es proporcional a $|\mathbf{X}|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{traza}(\mathbf{XS})\right]$ y $\text{IWishart}_p(n, \mathbf{S})$ la distribución Wishart invertida correspondiente. Finalmente $\text{Mul}(m, p_1, \dots, p_n)$ denota la distribución multinomial y $\text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ la distribución de Dirichlet.

2. Planteamiento del problema

Suponiendo un contexto local (un único criterio), sea $\mathbf{D} = \{D_1, \dots, D_r, r \geq 2\}$ un grupo de r decisores que son una muestra aleatoria simple de una población \mathbf{P} . Dichos decisores emiten r matrices recíprocas de comparaciones pareadas $\{A^{(k)}; k=1, \dots, r\}$ correspondientes a la comparación, respecto al criterio considerado, de un conjunto de n alternativas $\{A_1, \dots, A_n\}$, donde $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ es una matriz cuadrada ($n \times n$) positiva que verifica que $a_{ii}^{(k)} = 1, a_{ji}^{(k)} = \frac{1}{a_{ij}^{(k)}} > 0$ para $i, j = 1, \dots, n$. Los juicios $a_{ij}^{(k)}$ representan la importancia relativa de la alternativa i frente a la alternativa j para el decisor D_k , conforme a la escala fundamental propuesta por Saaty (1980) (ver Tabla 1).

Sean $\{v_1^G, \dots, v_n^G\}$ ($v_1^G \geq 0, \dots, v_n^G \geq 0$) las prioridades (sin normalizar) de las alternativas para el grupo, y sean w_1^G, \dots, w_n^G sus valores normalizados en modo distributivo, esto es, $w_i^G = \frac{v_i^G}{\sum_{i=1}^n v_i^G}$ para $i=1, \dots, n$.

2.1 El modelo

El modelo utilizado es un modelo multiplicativo con errores logarítmico normales, ampliamente utilizado en la literatura (Genest and Rives, 1994; Alho and Kangas, 1997; Aguarón and Moreno-Jiménez, 2000; Laininen and Hämäläinen, 2003). Dicho modelo viene dado por la siguiente expresión:

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}} e_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n-1; j = i+1, \dots, n; k = 1, \dots, r$$

con $e_{ij}^{(k)} \sim \text{LN}(0, \sigma^{(k)2})$ donde $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$ denota la distribución logarítmico normal de parámetros μ y σ^2 y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es el vector de prioridades del decisor D_k .

Tomando logaritmos se llega a un modelo de regresión con errores normales dado por las ecuaciones:

$$y_{ij}^{(k)} = \mu_i^{(k)} - \mu_j^{(k)} + \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad i=1, \dots, n-1; j=i+1, \dots, n; k=1, \dots, r \quad (1)$$

donde $y_{ij}^{(k)} = \log(a_{ij}^{(k)})$, $\mu_i^{(k)} = \log(v_i^{(k)})$ y $\varepsilon_{ij}^{(k)} = \log(e_{ij}^{(k)}) \sim N(0, \sigma^{(k)2})$ son independientes para $k=1, \dots, r$. Además, y con el fin de evitar problemas de identificabilidad, se fija para cada decisor, la alternativa A_n como alternativa de referencia ($\mu_n^{(k)} = 0 \Leftrightarrow v_n^{(k)} = 1 \forall k=1, \dots, r$). Utilizando notación matricial el modelo (1) se podrá poner como

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \text{ con } \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \sim N_J(\mathbf{0}, \sigma^{(k)2} \mathbf{I}_J) \quad (2)$$

donde $J=n(n-1)/2$ es el número de juicios emitidos por cada decisor, $\mathbf{y}^{(k)} = (y_{12}^{(k)}, y_{13}^{(k)}, \dots, y_{n-1n}^{(k)})'$ $k=1, \dots, r$; $\boldsymbol{\mu}^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{n-1}^{(k)})'$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = (\varepsilon_{12}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}, \dots, \varepsilon_{n-1n}^{(k)})'$ y $\mathbf{X} = (x_{ij})$ es una matriz $J \times (n-1)$ con $x_{ij} = 1$, $x_{ik} = -1$ y $x_{i\ell} = 0$ si $\ell \neq j, k$ si la i -ésima comparación emitida por los decisores involucra a las alternativas A_j y A_k con $j < k < n$. Si dicha comparación involucra a las alternativas A_j y A_n entonces $x_{ij} = 1$ y $x_{i\ell} = 0$ si $\ell \neq j$.

Con el fin de capturar las diferencias de opinión existentes entre los decisores del problema supondremos, además, que los vectores de prioridades $\mu^{(k)}$; $k=1, \dots, r$ son una muestra aleatoria simple de una mezcla de distribuciones normales dada por

$$\mu^{(k)} \sim G = \sum_{\ell=1}^m \pi_{\ell} N_{n-1}(\mu_G^{(\ell)}, \Sigma_G^{(\ell)}) \quad (3)$$

donde

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)' \sim \text{Dirichlet}(\mathbf{1}_m) \text{ con } \mathbf{1}_m = (1, \dots, 1)' \text{ vector de } m \text{ unos} \quad (4)$$

$$\mu_G^{(\ell)} \sim N_{n-1}(0_{n-1}, \sigma_{\mu_G}^2 I_{n-1}); \text{ independientes; } \ell=1, \dots, m \quad (5)$$

$$\Sigma_G^{(\ell)} \sim IW_{n-1}(n_0, n_0 \mathbf{D}_0); \text{ independientes; } \ell=1, \dots, m \quad (6)$$

$$m \sim \text{Poisson}(\lambda_0) \text{ truncada en } \{1, 2, \dots\} \quad (7)$$

siendo n_0 , \mathbf{D}_0 y λ_0 constantes conocidas. La distribución G describe, por lo tanto, la opinión de los individuos de la población \mathbf{P} sobre las alternativas del problema y constituye el objetivo central de nuestro estudio.

Supondremos, además, que

$$\tau^{(k)} = \frac{1}{\sigma^{(k)2}} \sim \text{Gamma}\left(\frac{n_1}{2}, \frac{d_1}{2}\right) \text{ independientes; } k=1, \dots, r \quad (8)$$

Finalmente, y con el fin de estimar los parámetros del modelo, definimos los vectores $\{z_k = (z_{k1}, \dots, z_{km})'$; $k = 1, \dots, r\}$ donde $z_k = \mathbf{e}_{\ell, m}$ con probabilidad π_{ℓ} ; $\ell=1, \dots, m$.

2.2. Distribución a posteriori

El vector de parámetros del modelo (2)-(6) viene dado por

$$\theta = \left((\tau^{(k)})_{k=1}^r, (\mu^{(k)})_{k=1}^r, m, (\mu_G^{(\ell)}, \Sigma_G^{(\ell)})_{\ell=1}^m, \boldsymbol{\pi} = (\pi_{\ell})_{\ell=1}^m \right)$$

y su distribución a posteriori conjunta con las variables auxiliares $\mathbf{z}=(z_1, \dots, z_r)$ por:

$$\begin{aligned} [(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}) | \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(r)}] &\propto \prod_{k=1}^r \left\{ [\mathbf{y}^{(k)} | \mu^{(k)}, \tau^{(k)}] [\tau^{(k)}] \prod_{\ell=1}^m [\mu^{(k)} | \mu_G^{(\ell)}, \Sigma_G^{(\ell)}]^{z_{k\ell}} \pi_{\ell}^{z_{k\ell}} \right\} \times \\ &\times \prod_{\ell=1}^m \{ [\mu_G^{(\ell)}] [\Sigma_G^{(\ell)}] \} [\pi | m] [m] \propto \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \prod_{k=1}^r \left\{ \left(\tau^{(k)} \right)^{J-1} \exp \left[-\tau^{(k)} \frac{\left(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X} \boldsymbol{\mu}^{(k)} \right)' \left(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X} \boldsymbol{\mu}^{(k)} \right)}{2} \right] I_{(0, \infty)} \left(\tau^{(k)} \right) \right\} \mathbf{x} \\
& \times \prod_{\ell=1}^m \left\{ \prod_{k=1}^r \left[\left| \boldsymbol{\Sigma}_G^{(\ell)} \right|^{-\frac{z_{k\ell}}{2}} \exp \left[-\frac{z_{k\ell} \left(\boldsymbol{\mu}^{(k)} - \boldsymbol{\mu}_G^{(\ell)} \right)' \left(\boldsymbol{\Sigma}_G^{(\ell)} \right)^{-1} \left(\boldsymbol{\mu}^{(k)} - \boldsymbol{\mu}_G^{(\ell)} \right)}{2} \right] \right] \right\} \mathbf{x} \\
& \times \prod_{\ell=1}^m \left\{ \exp \left[-\frac{\left(\boldsymbol{\mu}_G^{(\ell)} \right)' \boldsymbol{\mu}_G^{(\ell)}}{2 \sigma_{\mu_G}^2} \right] \left| \boldsymbol{\Sigma}_G^{(\ell)} \right|^{-\frac{n_0+n-1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{traza} \left(n_0 \mathbf{D}_0 \left(\boldsymbol{\Sigma}_G^{(\ell)} \right)^{-1} \right) \right] I_S \left(\boldsymbol{\Sigma}_G^{(\ell)} \right) \right\} \mathbf{x} \\
& \times \left\{ \prod_{\ell=1}^m \pi_{\ell}^{z_{k\ell}} \right\} I_{P_m}(\boldsymbol{\pi}) \frac{\lambda^m}{m!} \tag{9}
\end{aligned}$$

donde $I_A(x) = 1$ si $x \in A$ y 0 en caso contrario, $S = \{\boldsymbol{\Sigma} (n-1) \times (n-1) \text{ simétricas semidefinidas positivas}\}$ y $P_m = \left\{ \boldsymbol{\pi} \in \mathbf{R}^m : \sum_{\ell=1}^m \pi_{\ell} = 1 \text{ y } \pi_{\ell} \geq 0; \ell = 1, \dots, m \right\}$.

3. Metodología estadística

Dado que la distribución a posteriori (9) no admite un tratamiento analítico sencillo utilizaremos métodos MCMC para realizar inferencias acerca de las diversas componentes del vector de parámetros θ . Como además, para cada valor de m , se tiene una familia de modelos diferentes cuyos vectores de parámetros son de diferente dimensión utilizaremos la metodología de procesos puntuales reversibles recientemente desarrollada por Stephens (2000). Para ello utilizaremos el siguiente algoritmo que obtiene una muestra de (9) a partir de la cual se pueden realizar inferencias acerca de los parámetros del modelo.

3.1. Algoritmo

El algoritmo consta de dos partes bien diferenciadas cuya ejecución se alterna en cada iteración del mismo. En la primera parte se realiza una exploración del espacio de modelos del problema utilizando procesos puntuales de nacimiento y muerte con saltos reversibles desarrollados por Stephens (2000). En la segunda parte se realiza un análisis bayesiano de cada uno de los modelos explorados por la primera parte utilizando el Gibbs sampling.

Para exponer el algoritmo definimos el conjunto $\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ donde

$$\Omega_m = \left\{ \left(\pi_1, \boldsymbol{\mu}_G^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(1)} \right), \dots, \left(\pi_m, \boldsymbol{\mu}_G^{(m)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(m)} \right) : \boldsymbol{\pi} \in \mathbf{P}_m, \boldsymbol{\mu}_G^{(k)} \in \mathbf{R}^{n-1}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(k)} \in \mathbf{S} \right\}$$

Ω constituye el espacio de los objetos en el que se desarrolla el proceso de nacimiento y muerte que se utiliza en el algoritmo.

Diremos que hay un nacimiento de un objeto $\left(\pi_{m+1}, \boldsymbol{\mu}_G^{(m+1)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(m+1)} \right)$ cuando en el algoritmo pasamos de Ω_m a Ω_{m+1} donde:

$$\begin{aligned} \Omega_{m+1} &= \left\{ \left(\pi_1(1 - \pi_{m+1}), \boldsymbol{\mu}_G^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(1)} \right), \dots, \left(\pi_m(1 - \pi_{m+1}), \boldsymbol{\mu}_G^{(m)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(m)} \right), \left(\pi_{m+1}, \boldsymbol{\mu}_G^{(m+1)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(m+1)} \right) \right\} \\ \pi_{m+1} &\sim \text{Beta}(1, m), \quad \boldsymbol{\mu}_G^{(m+1)} \sim N_{n-1}(\mathbf{0}_{n-1}, \sigma_{\boldsymbol{\mu}_G}^2 \mathbf{I}_{n-1}) \text{ y } \boldsymbol{\Sigma}_G^{(m+1)} \sim \text{IW}(n_0, \mathbf{D}_0) \end{aligned} \quad (10)$$

Diremos que muere la componente ℓ -ésima de Ω_m , $\left(\pi_\ell, \boldsymbol{\mu}_G^{(\ell)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(\ell)} \right)$ si pasamos de Ω_m a $\Omega_{m-1}^{(-\ell)}$ donde:

$$\begin{aligned} \Omega_{m-1}^{(-\ell)} &= \\ &\left\{ \left(\frac{\pi_1}{(1 - \pi_\ell)}, \boldsymbol{\mu}_G^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(1)} \right), \dots, \left(\frac{\pi_{\ell-1}}{(1 - \pi_\ell)}, \boldsymbol{\mu}_G^{(\ell-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(\ell-1)} \right), \left(\frac{\pi_{\ell+1}}{(1 - \pi_\ell)}, \boldsymbol{\mu}_G^{(\ell+1)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(\ell+1)} \right), \dots, \left(\frac{\pi_m}{(1 - \pi_\ell)}, \boldsymbol{\mu}_G^{(m)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(m)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Con estas definiciones el algoritmo consta de los siguientes pasos:

Paso 0 (Inicialización del algoritmo)

Se fija el número máximo de iteraciones, iter_{\max} así como el número de iteraciones del Gibbs sampling, I , utilizadas para realizar un análisis bayesiano de cada uno de los modelos explorados por el algoritmo. Se extrae $m^{(0)}$ de $\text{Poisson}(\lambda_0)$ y un conjunto de objetos

$$\Omega_{m^{(0)}}^{(0)} = \left\{ \left(\pi_1^{(0)}, \boldsymbol{\mu}_G^{(0,1)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(0,1)} \right), \dots, \left(\pi_{m^{(0)}}^{(0)}, \boldsymbol{\mu}_G^{(0,m^{(0)})}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(0,m^{(0)})} \right) \right\}$$

utilizando, por ejemplo, las distribuciones a priori (4)-(6). A continuación se generan los vectores auxiliares $\mathbf{z}^{(0)} = \{\mathbf{z}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{z}_r^{(0)}\}$ con $\mathbf{z}_k^{(0)} = (z_{k1}^{(0)}, \dots, z_{km^{(0)}}^{(0)})$; $k=1, \dots, r$ de forma que $\mathbf{z}_k^{(0)}$ es igual al ℓ -ésimo vector coordenado de $\mathbf{R}^{m^{(0)}}$ con probabilidad $\pi_\ell^{(0)}$; $\ell=1, \dots, m^{(0)}$ y, a partir de ellos se generan $\{\boldsymbol{\mu}^{(0,k)}; k=1, \dots, r\}$ mediante la distribución normal

$N_{n-1} \left(\sum_{\ell=1}^{m^{(0)}} z_{k\ell}^{(0)} \boldsymbol{\mu}_G^{(0,\ell)}, \sum_{\ell=1}^{m^{(0)}} z_{k\ell}^{(0)} \boldsymbol{\Sigma}_G^{(0,\ell)} \right)$. Se pone $it=1$ y se repiten los pasos siguientes hasta

que $it = iter_{max}$.

Paso 1 (Gibbs sampling)

Se ejecutan los pasos 1 a) hasta 1 f) durante I iteraciones

1 a) Se extraen $\{\tau^{(it,k)}; k = 1, \dots, r\}$ de

$$\text{Gamma} \left(\frac{J + n_1}{2}, \frac{(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}^{(it-1,k)})'(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}^{(it-1,k)}) + d_1}{2} \right)$$

1 b) Se pone $m^{(it)} = m^{(it-1)}$ y se extraen $\{\boldsymbol{\mu}^{(it,k)}; k = 1, \dots, r\}$ de $N_{n-1}(\mathbf{MED}^{(k)}, \mathbf{VAR}^{(k)})$ donde

$$\mathbf{MED}^{(k)} = \mathbf{VAR}^{(k)} \left(\tau^{(it,k)} (\mathbf{X}'\mathbf{y}^{(k)}) + \sum_{\ell=1}^{m^{(it)}} z_{k\ell}^{(it-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_G^{(it-1,\ell)})^{-1} \boldsymbol{\mu}_G^{(it-1,\ell)} \right)^{-1}$$

$$\mathbf{VAR}^{(k)} = \left(\tau^{(it,k)} (\mathbf{X}'\mathbf{X}) + \sum_{\ell=1}^{m^{(it)}} z_{k\ell}^{(it-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_G^{(it-1,\ell)})^{-1} \right)^{-1}$$

1 c) Se extraen $\{\boldsymbol{\Sigma}_G^{(it,\ell)}; \ell = 1, \dots, m^{(it)}\}$ de $IW(n_\ell, \mathbf{D}_\ell)$ con

$$n_\ell = n_0 + 1 + \sum_{\ell=1}^{m^{(it)}} z_{k\ell}^{(it-1)}$$

$$\mathbf{D}_\ell = n_0 \mathbf{D}_0 + \sum_{k=1}^r z_{k,\ell}^{(it-1)} (\boldsymbol{\mu}^{(it,k)} - \boldsymbol{\mu}_G^{(it-1,\ell)}) (\boldsymbol{\mu}^{(it,k)} - \boldsymbol{\mu}_G^{(it-1,\ell)})'$$

1 d) Se extraen $\{\boldsymbol{\mu}_G^{(it,\ell)}; \ell = 1, \dots, m^{(it)}\}$ de $N_{m^{(it-1)}}(\mathbf{MED}_G^{(\ell)}, \mathbf{VAR}_G^{(\ell)})$ donde

$$\mathbf{MED}_G^{(\ell)} = \mathbf{VAR}_G^{(\ell)} \left(\sum_{k=1}^r z_{k\ell}^{(it-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_G^{(it,\ell)})^{-1} \boldsymbol{\mu}^{(it,k)} \right)$$

$$\mathbf{VAR}_G^{(\ell)} = \left(\sum_{k=1}^r z_{k\ell}^{(it-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_G^{(it,\ell)})^{-1} + \frac{1}{\sigma_{\boldsymbol{\mu}_G}^2} \mathbf{I}_{n-1} \right)^{-1}$$

1 e) Se extraen $\{\mathbf{z}_k^{(it)}; k = 1, \dots, r\}$ de la distribución $\text{Mul}(1, p_1^{(k)}, \dots, p_{m^{(it)}}^{(k)})$ donde

$$p_\ell^{(k)} \propto \pi_\ell^{(it-1)} |\Sigma_G^{(it,\ell)}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}^{(it,k)} - \boldsymbol{\mu}_G^{(it,\ell)})' (\Sigma_G^{(it,\ell)})^{-1} (\boldsymbol{\mu}^{(it,k)} - \boldsymbol{\mu}_G^{(it,\ell)})\right]; \ell=1, \dots, m^{(it)}$$

1 f) Se extraen $\boldsymbol{\pi}^{(it)} = (\pi_1^{(it)}, \dots, \pi_{m^{(it)}}^{(it)})$ de la distribución

$$\text{Dirichlet}\left(1 + \sum_{k=1}^r z_{k1}^{(it)}, \dots, 1 + \sum_{k=1}^r z_{km^{(it-1)}}^{(it)}\right)$$

y se hace $it=it+1$.

Paso 2 (Proceso de nacimiento y muerte)

2 a) Se hace $\theta^{(it)} = \theta^{(it-1)}$, $\mathbf{z}^{(it)} = \mathbf{z}^{(it-1)}$, $\Omega_{m^{(it)}} = \left\{(\pi_\ell^{(it)}, \boldsymbol{\mu}_G^{(it,\ell)}, \Sigma_G^{(it,\ell)}) ; \ell = 1, \dots, m^{(it)}\right\}$ y se pone $t=0$

2 b) Si $m^{(it)} = 1$ se va al paso 2 d). En otro caso, se calculan los ratios de muerte de cada componente de la mixtura

$$\delta_\ell = \frac{L(\Omega_{m^{(it)}}^{(-\ell)})}{L(\Omega_{m^{(it)}})} ; \ell = 1, \dots, m^{(it)}$$

donde $L(\Omega_m) = \prod_{k=1}^r \left(\sum_{\ell=1}^m \pi_\ell \varphi(\mathbf{x}^{(k)}; \boldsymbol{\mu}_G^{(\ell)}, \Sigma_G^{(\ell)}) \right)$ es la función de verosimilitud de la configuración de puntos Ω_m donde $\varphi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ es la función de densidad de una $N_{n-1}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ evaluada en $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1}$.

2 c) Se simula el instante del siguiente salto mediante $t = t + v$ donde v se extrae de una exponencial de media $\frac{1}{\lambda_0 + \delta}$ con $\delta = \sum_{\ell=1}^{m^{(it)}} \delta_\ell$ la tasa de muertes del proceso. Si $t > it$ se

vuelve al paso 1 del algoritmo. En caso contrario se va al paso 2 d).

2 d) Simulación del tipo de salto. Distinguiamos, para ello, dos casos:

2d)1 Si $m^{(it)} = 1$ se realiza un nacimiento utilizando el procedimiento (10)

2d)2 Si $m^{(it)} > 1$ se produce un nacimiento siguiendo el procedimiento (10) con probabilidad $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \delta}$ y con probabilidad $\frac{\delta_\ell}{\lambda_0 + \delta}$ la muerte de la componente ℓ -ésima

siguiendo el procedimiento (11). En este caso se vuelven a reasignar los valores de $\{\mathbf{z}_k^{(it)} : \mathbf{z}_k^{(it-1)} = \mathbf{e}_\ell\}$ aplicando el paso 1 e).

En ambos casos si el salto realizado es un nacimiento se pone $m^{(it)} = m^{(it-1)} + 1$ y si es una muerte $m^{(it)} = m^{(it-1)} - 1$. Volver al paso 2 b).

Como consecuencia del algoritmo se obtiene una muestra de la distribución (9)

$$\left\{ \left(\boldsymbol{\theta}^{(it)}, \mathbf{z}^{(it)} \right) = \left(\left(\left(\tau^{(it,k)} \right)_{k=1}^r, \left(\boldsymbol{\mu}^{(it,k)} \right)_{k=1}^r, m^{(it)}, \left(\boldsymbol{\mu}_G^{(it,\ell)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(it,\ell)} \right)_{\ell=1}^{m^{(it)}}, \boldsymbol{\pi}^{(it)} \right), \mathbf{z}^{(it)} \right); it = it_0, \dots, iter_{\max} \right\}$$

donde it_0 es el periodo estimado para que el proceso construido converja a su distribución estacionaria (9). Dicho periodo puede estimarse siguiendo los procedimientos habituales de la literatura (ver, por ejemplo, el capítulo 8 de Robert y Casella, 1999). Utilizando dicha muestra pueden realizarse inferencias acerca de las diversas componentes de θ . En particular se puede analizar si existen consenso entre los decisores o si, por el contrario hay diversos grupos de opinión. En ambos casos se podrían analizar sus preferencias por las diversas alternativas a partir de las cuales se llevaría a cabo un proceso de toma de decisiones, si hubiera consenso suficiente, o bien iniciarse un proceso de negociación.

4. Análisis de un caso ilustrativo

4.1. Descripción de problema

Con el fin de ilustrar el uso de la metodología descrita en la sección anterior analizamos, a continuación, los resultados de una encuesta llevada a cabo con una muestra aleatoria simple de 94 alumnos de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Zaragoza a los que se les pidió que compararan, utilizando la escala fundamental de Saaty (1980) (ver Tabla 1), las áreas de las figuras geométricas mostradas en la Figura 1. Este experimento es una réplica del llevado a cabo por Saaty (1990) para evaluar, de forma relativa, magnitudes físicas a través de comparaciones pareadas.

Como resultado de dicha encuesta se obtuvieron 94 matrices de comparaciones pareadas 4x4. El número de decisores es, por lo tanto, $r=94$ siendo $n=4$ las alternativas comparadas ($A_1 =$ rectángulo, $A_2 =$ triángulo, $A_3 =$ cuadrado y $A_4 =$ rombo) y el área limitada por cada figura el criterio de comparación. Todos los alumnos emitieron, además, todos los juicios posibles ($J = 6$) sin que existieran valores ausentes.

Dado el escaso número de datos por alumno y con el fin de reducir el número de parámetros del modelo se adoptó, además, la hipótesis adicional de que las matrices $\Sigma_G^{(\ell)}$; $\ell=1, \dots, m$ fueran diagonales de la forma $\Sigma_G^{(\ell)} = \text{diag}(\sigma_{Gi}^{2(\ell)})_{i=1}^{n-1}$, sustituyendo las distribuciones Wishart invertidas de (6) por $n-1$ gammas invertidas independientes $\text{IG}\left(\frac{n_0}{2}, \frac{d_0}{2}\right)$. El algoritmo 3.1 necesario para obtener una muestra de la distribución a posteriori (9) es similar al descrito anteriormente pero sustituyendo, en el paso 1.c) las distribuciones Wishart invertidas por la generación de $(\sigma_{Gi}^{2(\ell)})_{i=1}^{n-1}$ a partir de $n-1$ distribuciones gammas invertidas $\text{IGamma}\left(\frac{n_\ell}{2}, \frac{d_{\ell,i}}{2}\right)$ con $n_\ell = n_0 + 1 + \sum_{\ell=1}^{m^{(it)}} z_{k\ell}^{(it-1)}$ y $d_{\ell,i} = n_0 d_0 + \sum_{k=1}^r z_{k,\ell}^{(it-1)} (\mu_i^{(it,k)} - \mu_{G,i}^{(it-1,\ell)})^2$.

Tabla 1: Escala fundamental de Saaty (1980)

Intensidad	Definición	Explicación
1	Igual importancia	Dos alternativas contribuyen de igual forma al objetivo
3	Importancia moderada	La experiencia y el juicio favorecen una alternativa sobre otra levemente
5	Importancia fuerte o esencial	La experiencia y el juicio favorecen fuertemente una alternativa sobre la otra
7	Importancia muy fuerte	Una alternativa es mucho más favorecida que la otra y su dominación está demostrada en la práctica
9	Importancia extrema	La evidencia a favor de una alternativa sobre otra tiene el mayor orden posible para su afirmación.
2, 4, 6, 8	Valores intermedios entre dos juicios adyacentes	Cuando se necesita un compromiso
Recíprocos	Si a la alternativa i se le asigna uno de los valores anteriores cuando es comparado con la actividad j , entonces j toma el valor recíproco cuando es comparado con i .	
Racionales	Cocientes que surgen de la escala	Si fuera necesario forzar la consistencia obteniendo n valores numéricos.

Para analizar estos datos aplicamos la metodología de la sección 2 con $n_0 = 0.1$, $d_0 = d_1 = 0.1$, $n_1 = 6$ y $\sigma_{\mu_g}^2 = 100$. El valor común D_0 y D_1 es aproximadamente igual al

valor del índice de consistencia geométrico mediano de los 94 individuos calculados a partir de las matrices de comparaciones pareadas anteriores y es, además, aproximadamente igual al valor máximo del índice de consistencia σ^2 para el cual

$$P \left[\frac{1}{1 + \frac{50}{100}} \leq \frac{a_{ij}}{w_i / w_j} \leq 1 + \frac{50}{100} \right] \approx 0.95 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Por su parte $\sigma_{\mu_g}^2$ y n_0 se eligieron de forma que las distribuciones a priori (5) y (6) sean propias pero poco informativas. El valor de n_1 es igual al número de juicios emitidos por cada alumno y es reflejo del tamaño muestral utilizado para establecer el valor de d_1 comentado anteriormente. Finalmente, tomamos $\lambda_0 = 1$ que supone, a priori, que el número m de componentes de la mixtura necesarios para construir G es igual a 1, es decir, que dicha distribución es normal.

El algoritmo descrito en la sección 3.1 se ejecutó $iter_{max} = 20000$ iteraciones tomando diversos valores de partida para los parámetros del modelo. La convergencia de la cadena fue rápida cifrándose en unas 1000 iteraciones, utilizando para ello procedimientos visuales y cuantitativos (Geweke, 1992; Gelman y Rubin, 1992) aplicados a una muestra aleatoria de los vectores de prioridades $\{(w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, w_3^{(k)}, w_4^{(k)})\}, k = 1, \dots, 94\}$. Con el fin, sin embargo, de dar más credibilidad a los resultados se descartaron las $it_0 = 10000$ primeras iteraciones utilizándose el resto de las mismas para realizar las inferencias expuestas a continuación

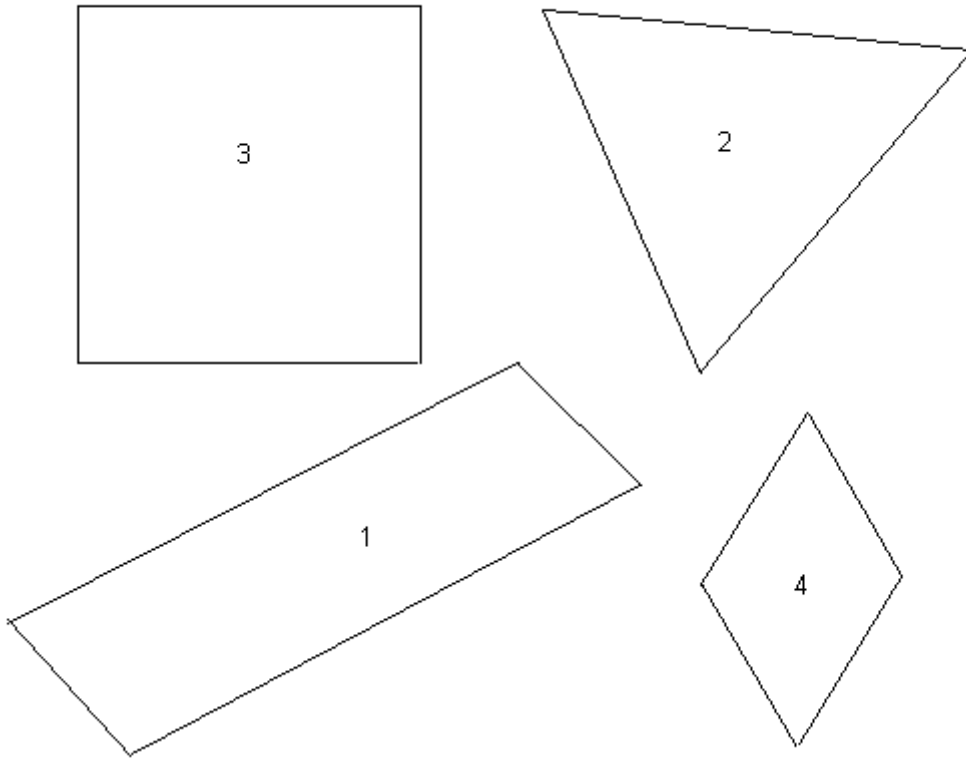


Figura 1: Figuras geométricas comparadas

4.2. Distribución poblacional de las prioridades

Una estimación de la distribución G vendrá dada por $E[G(\mu)|y]$. Dicha esperanza se puede calcular utilizando el estimador tipo Blackwell-Rao (Casella y Robert, 1996) dado por

$$\frac{1}{(\text{iter}_{\max} - \text{it}_0 + 1)} \sum_{\text{it}=\text{it}_0}^{\text{iter}_{\max}} \sum_{\ell=1}^{m^{(\text{it})}} \pi_{\ell}^{(\text{it})} N_{n-1}(\boldsymbol{\mu}_G^{(\text{it},\ell)}, \boldsymbol{\Sigma}_G^{(\text{it},\ell)}) \quad (12)$$

Un 98.80% de las veces el valor de $m^{(\text{it})} = 1$ (y, por lo tanto, $\pi_{\ell}^{(\text{it})} = 1$), un 1.17% fue 2 y el resto 3. Este hecho confirma que, tal y como se suponía a priori, la distribución G no está muy lejos de la normalidad. A partir de dicha distribución se puede extraer una muestra aleatoria simple para el vector de prioridades normalizado a suma 1, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)'$ a partir de la cual es posible estimar dichas prioridades y calcular intervalos de credibilidad del $100(1-\alpha)\%$ mediante las medianas y los cuantiles 0.5α y $1-0.5\alpha$ ($\alpha \in (0,1)$) de la muestra obtenida (ver Tabla 2), estimadores de su densidad a posteriori mediante estimadores tipo kernel (ver Figura 2), evaluar probabilidades de cambio de rango (ver Tabla 3) o estimaciones e intervalos de

credibilidad para las magnitudes relativas $\frac{W_i}{W_j}$ (ver Tabla 4) entre pares de alternativas o las estructuras de preferencia más probables (ver Tabla 5). Del estudio de dichas tablas y figuras se observa que el ranking más probable de áreas es $A_3 > A_1 > A_2 > A_4$ estimándose que las áreas del cuadrado, rectángulo y triángulo son, respectivamente, unas 10, 4.5 y 3.5 veces el área del rombo. La mayor probabilidad de cambio de rango se da entre las alternativas A_1 y A_2 debido a la existencia de algunos alumnos que las cambian de orden. Este hecho puede verse en la Figura 3 en la que se muestra un biplot basado en las distribuciones de probabilidad a posteriori de las estructuras de preferencia para cada uno de los alumnos de la muestra obtenidas mediante el método de Monte Carlo a partir de las muestras

$$\{\boldsymbol{\mu}^{(it,k)}; it = it_0, \dots, it_{\max}; k = 1, \dots, 94\}$$

En dicho biplot se representan conjuntamente los decisores, como vectores que apuntan en las direcciones de mayor probabilidad, y las estructuras de preferencia más probables, como puntos. Se observa que, aunque la mayor parte de los alumnos prefieren la estructura de preferencia $A_3 > A_1 > A_2 > A_4$, existe un pequeño grupo de alumnos (los vectores que se encuentran entre los casos 26 y 30 inclusive) que asignan una probabilidad no despreciable a la estructura de preferencia $A_3 > A_2 > A_1 > A_4$ (sus valores oscilan entre un 16.49% para el caso 26 y un 55.61% para el caso 30) poniendo de manifiesto la existencia de grupos de alumnos que tienen dificultades a la hora de ordenar entre las áreas del rectángulo y el triángulo de la Figura 1.

4.3 Sensibilidad respecto a la distribución a priori

Los resultados anteriores son, en general, robustos a los hiperparámetros de la distribución a priori, a excepción de las inferencias hechas acerca de las preferencias individuales de los decisores, las cuales son sensibles a los parámetros de la distribución a priori (8). Estos parámetros determinan la amplitud del efecto shrinkage de los vectores de prioridad individuales $\{\boldsymbol{\mu}^{(k)}; k=1, \dots, r\}$ hacia la distribución de prioridades del grupo G , de forma que cuanto menor (resp. mayor) es el valor de los parámetros n_1 y $1/d_1$, mayor (resp. menor) es dicho efecto, debido al menor (resp. mayor) peso dado a los datos de cada individuo y mayor (resp. menor) peso dado a la distribución G . Este hecho se observa en las Figuras 4 y 5 en las que se muestran los biplots correspondientes a la distribución a priori descrita anteriormente pero con $n_1 = 1$ y 10,

respectivamente. En dichos gráficos se aprecia la existencia de una tendencia a disminuir (si $n_1 = 1$) y a aumentar (si $n_1 = 10$) las diferencias entre las preferencias de los individuos comentadas anteriormente; ello es debido al escaso número de juicios por decisor y a los bajos niveles de consistencia del grupo de alumnos discordantes con la opinión general de la muestra, con respecto al resto de los alumnos, todo lo cual provoca que las inferencias acerca de sus prioridades basadas en sus juicios sean menos exactas y más sensibles a la atracción de la distribución de las prioridades del grupo, G , la cual es mucho más precisa.

Tabla 2: Intervalos de credibilidad del 95%

Prioridad	Mediana a posteriori	Intervalo de credibilidad
w_1	0.2366	(0.1956,0.2809)
w_2	0.1843	(0.1289,0.2573)
w_3	0.5245	(0.4375,0.6074)
w_4	0.0521	(0.0395,0.0683)

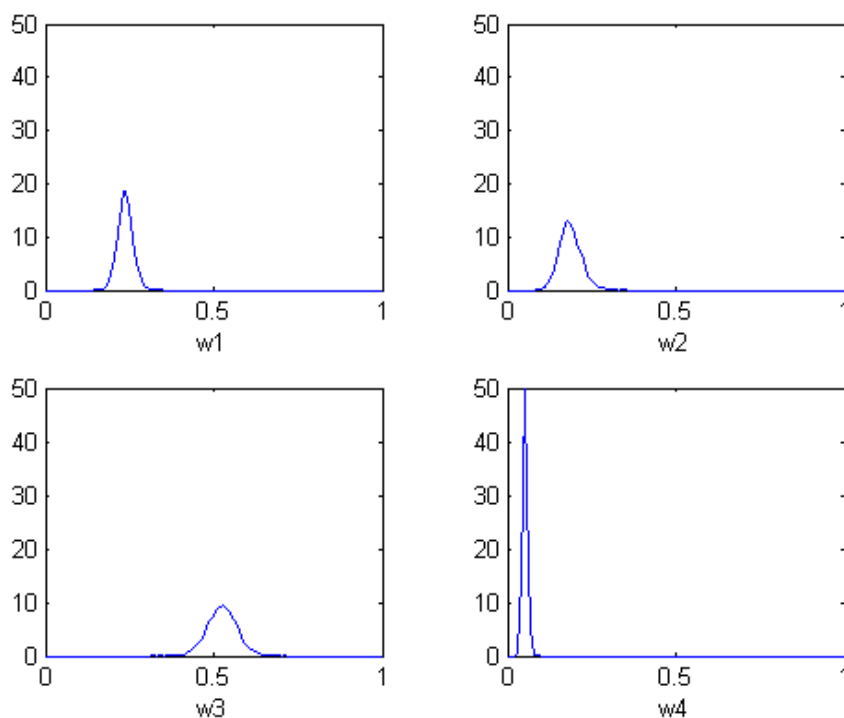


Figura 2: Distribuciones a posteriori de las prioridades $\{w_i; i=1, \dots, 4\}$

Tabla 3: Probabilidades de cambio de rango entre alternativas $P(w_i > w_j | y)$

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
A ₁	-	0.9107	0.0000	1.0000
A ₂	0.0893	-	0.0000	1.0000
A ₃	1.0000	1.0000	-	1.0000
A ₄	0.0000	0.0000	0.0000	-

Tabla 4: Medianas e intervalos de credibilidad del 95% para los cocientes $\frac{w_i}{w_j}$ $i < j$

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
A ₁	-	1.28 (0.88,1.89)	0.45 (0.33,0.62)	4.53 (3.62,5.69)
A ₂		-	0.35 (0.22,0.58)	3.54 (2.31,5.40)
A ₃			-	9.99 (6.81,14.63)
A ₄				-

Tabla 5: Estructuras de preferencia más probables

Estructura	Probabilidad a posteriori (%)
A ₃ > A ₁ > A ₂ > A ₄	91.07
A ₃ > A ₂ > A ₁ > A ₄	8.93

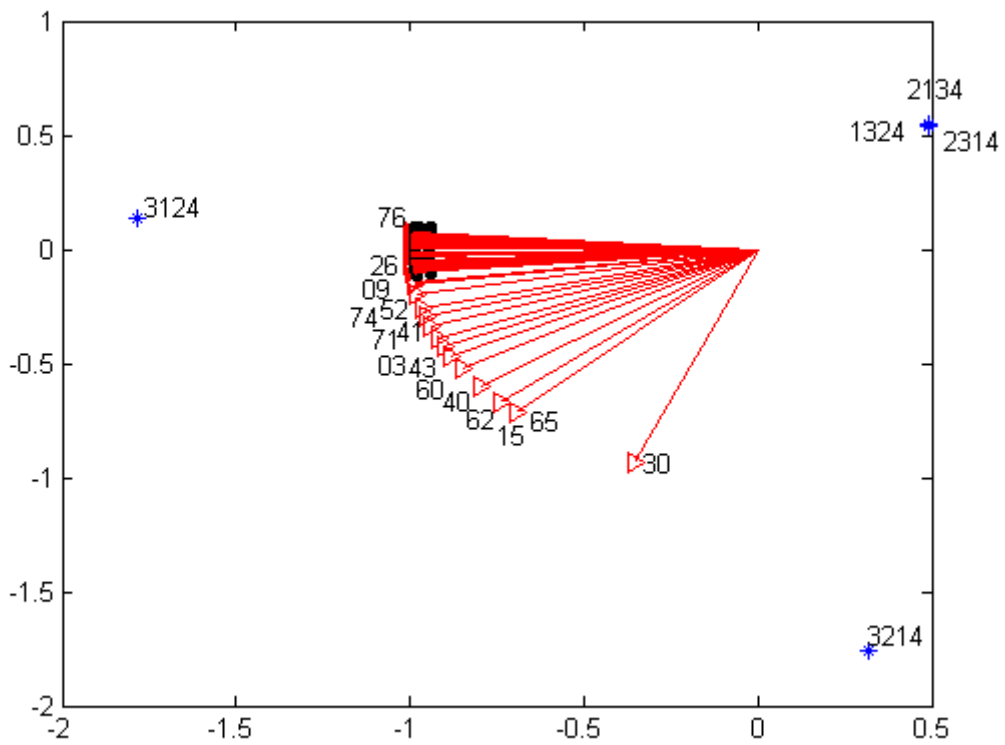


Figura 3: Diagrama conjunto de decisores y estructuras de preferencia ($n_1=6, d_1=0.1$)

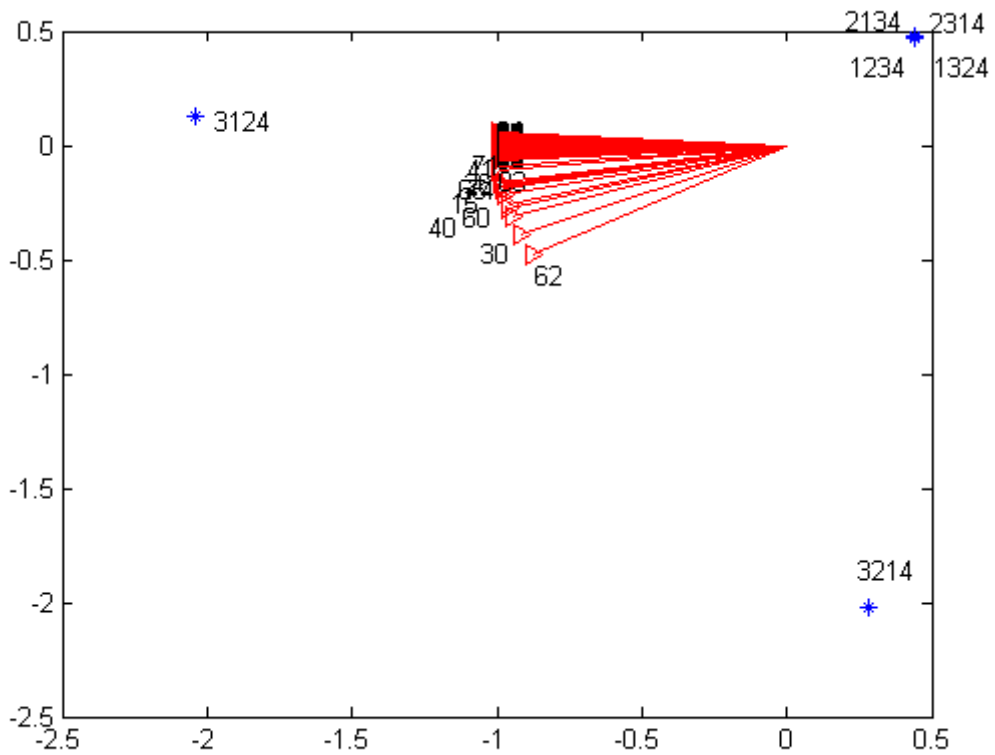


Figura 4: Diagrama conjunto de decisores y estructuras de preferencia ($n_1=1, d_1=0.1$)

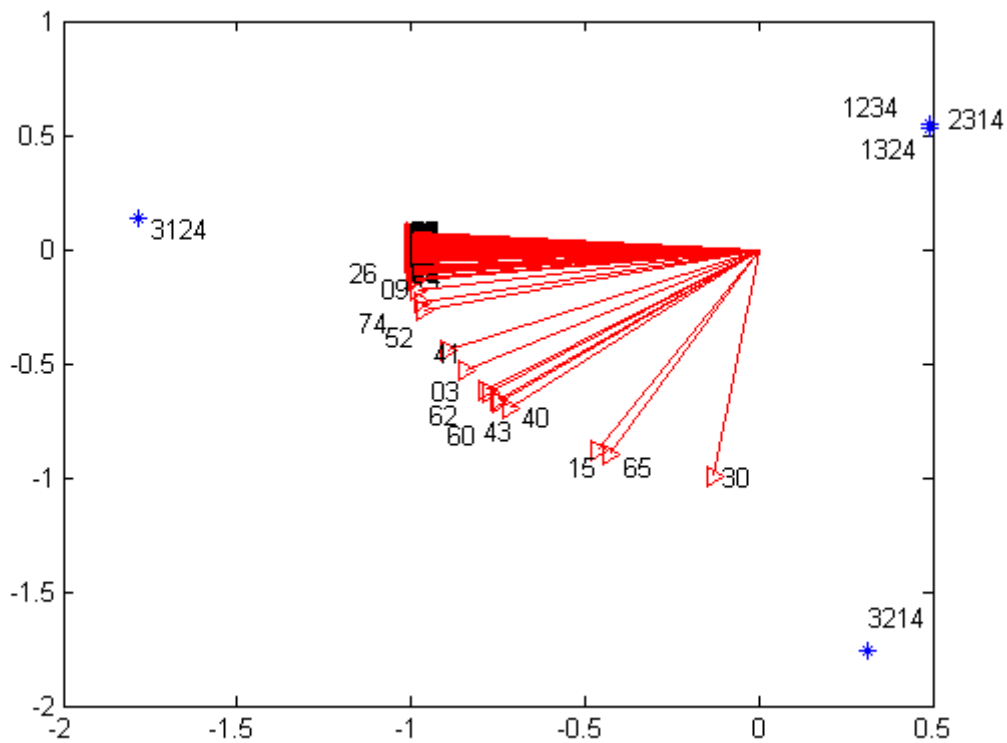


Figura 5: Diagrama conjunto de decisores y estructuras de preferencia ($n_1=10, d_1=0.1$)

5. Conclusiones

En este trabajo se ha analizado el problema de decisión en grupo con AHP en un contexto local (un sólo criterio), cuando el número de decisores es una muestra aleatoria de una población y el objetivo del análisis es inferir, a partir de las opiniones de dicha muestra, las de la población. Para ello se ha propuesto un modelo jerárquico bayesiano multiplicativo con errores logarítmico-normales, que utiliza una mixtura de normales con un número desconocido de componentes para representar la distribución de preferencias de la población, lo cual confiere de mayor flexibilidad y realismo al análisis realizado, debido a la posibilidad de modelar gran cantidad de formas diferentes de distribuciones. La metodología utilizada permite analizar, en particular, la existencia de grupos de opinión diferentes dentro de la población objeto de estudio, a partir de los cuales podrían iniciarse procesos de negociación.

La técnica propuesta es muy flexible y general pudiendo extenderse, fácilmente, al análisis de jerarquías y matrices de comparaciones pareadas incompletas y/o imprecisas. En futuros trabajos se ilustrarán éstas y otras posibilidades de la misma.

Bibliografía

1. Aguarón, J. y Moreno-Jiménez, J.M. (2000): "Stability Intervals in the Analytic Hierarchy Process". *European Journal of Operational Research*, 125, pp. 114–133
2. Aguarón, J. y Moreno-Jiménez, J.M. (2003): "The Geometric Consistency Index: Approximated Thresholds". En evaluación en *European Journal of Operational Research*.
3. Alho, J.M. y Kangas, J. (1997): "Analyzing Uncertainties in Experts' Opinions of Forest Plan Performance". *Forest Science*, 43, pp. 521–528
4. Casella, G. y Robert, C.P. (1996): "Rao-Blackwellisation of sampling schemes". *Biometrika*, 83, pp. 81-94.
5. Crawford, G. y Williams, C. (1985): "A Note on the Analysis of Subjective Judgment Matrices". *Journal of Mathematical Psychology*, 29, pp. 387–405.
6. Gelman, A. y Rubin, D. (1992): "Inference from iterative simulation using multiple sequences" (with discussion). *Statistic. Sci.* 7, pp. 457-511.
7. Genest, C. y Rivest, L.P. (1994): "A Statistical Look at Saaty's Method of Estimating Pairwise Preferences Expressed on a Ratio Scale". *Journal of Mathematical Psychology* 38, pp. 477-496.
8. Geweke, J. (1992): "Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments" (with discussion). In *Bayesian Statistics 4*, J.M. Bernardo; J.O. Berger; A.P. Dawid and A.F.M. Smith (eds), pp. 169-193. Oxford University Press, Oxford.
9. Laininen, P. y Hämäläinen, R.P. (2003): "Analyzing AHP-matrices by regression". *European Journal of Operation Research*, 148, pp. 514-524.
10. Moreno-Jiménez, J.M.; Aguarón, J.; Escobar, M.T. y Turón, A. (1999): "The Multicriteria Procedural Rationality on Sisdema", *European Journal of Operational Research*, 119 (2), pp. 388–403.
11. Moreno-Jiménez, J.M.; Aguarón, J. y Escobar, M.T. (2002): "Decisional Tools for Consensus Building in AHP-Group Decision Making". En evaluación.

12. Moreno-Jiménez, J.M. (2001): “La Investigación Operativa y el Nuevo Método Científico”. *Revista de la Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa*, 20, pp. 120–142.
13. Moreno-Jiménez, J.M. (2003). Los Métodos Estadísticos en el Nuevo Método Científico. En CASAS, J.M. y PULIDO, A.: *Información económica y técnicas de análisis en el siglo XXI* (Homenaje al Prof. Pena Trapero). INE, 331-348.
14. Moreno-Jiménez, J.M. y Polasek, W. (2003): " E-Democracy and Knowledge. A Multicriteria Framework for the New Democratic Era". *Journal Multi-criteria Decision Analysis* 12, pp. 1-14.
15. Robert, C.P. y Casella, G. (1999): *Monte Carlo Statistical Methods*. New-York: Springer-Verlag.
16. Saaty, T.L. (1977): “A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures”, *Journal of Mathematical Psychology*, 15 (3), pp. 234–281.
17. Saaty, T.L. (1980): *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. Mc Graw-Hill, New York.
18. Saaty, T.L. (1990): *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. 2ª Impresión. RSW Pub. Pittsburgh.
19. Stephens, M. (2000): “Bayesian Analysis of Mixture Models with an unknown number of components-an alternative to reversible jump methods”. *Annals of Statistics*, 28, pp. 40-74.